Clasa a IX-a

Soluţii

Problema 1

Avem $(|a|+|b|+|c|)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9$, de unde $|a|+|b|+|c| \leq 3$. (*)

Pe de altă parte, $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$, de unde $(abc)^2 \leq 1$, deci $abc \in [-1,1]$ (**). Atunci $-abc \leq 1$ şi concluzia rezultă.

Puctaj recomandat: (*) 3 puncte; (**) 3 puncte; finalizare 1 punct.

Problema 2

Avem $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$, de unde rezultă $A(-9,-2)$ şi raza cercului circumscris $AO = \sqrt{50}$. Dreapta BC este perpendiculară pe OD şi are ecuaţia $x = 7-2y$. Din condiţia $BO = CO = \sqrt{50}$ se obţin $B(3,2)$ şi $C(-1,4)$ (sau viceversa).

Puctaj recomandat: determinarea coordonatelor lui A: 2 puncte, finalizare 5 puncte.

Problema 3

a) Căutăm soluţii $x = \frac{n}{10}$, cu $n \in \mathbf{N}$. Se arată că $x = \frac{13}{10}$ verifică egalitatea şi apoi deducem că $x = 10k + \frac{13}{10}$ satisface relaţia.

b) Presupunem prin absurd că există un $x > 0$ raţional şi fie $n = [x]$; rezultă $n < x < n+1$ şi $n^2 < x^2 < n^2+2n+1$. Fie $[x^2] = n^2+k$, unde $0 \leq k \leq 2n$. Atunci egaliatea devine

$$x^2 + x - n^2 - n - k - 1 = 0.$$

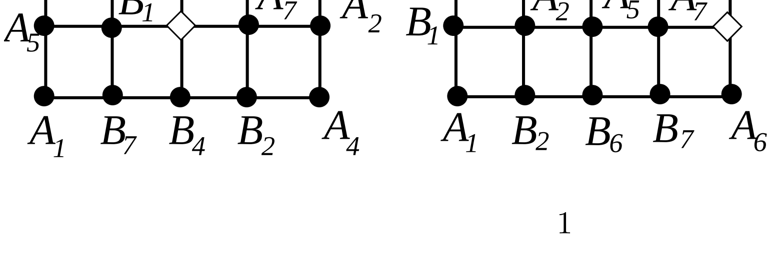
Discriminantul $\Delta = 4n^2+4n+4k+5$ trebuie să fie un pătrat perfect impar. Egalitatea $\Delta = (2m+1)^2$ conduce la $n^2+n+k+1 = m^2+m$, dar $m \geq n+1$, deci $m^2+m \geq n^2+3n+2$. Rezultă $k \geq 2n+1$, contradicţie.

Punctaj recomandat: a) Determinarea unei soluţii 1 punct, finalizare 3 puncte; b) 3 puncte.

Problema 4

Vom demonstra că A poate fi doar centrul dreptunghiului sau mijlocul uneia dintre laturile mici.

Pentru aceste cazuri putem forma, de exemplu, perechile



În cazul unui alt punct A, putem considera că $\mathcal{M}$ este mulţimea $\{0,1,2,3,4\}\times\{0,1,2\}$. Presupunem că există o astfel de împărţire în perechi şi fie $A_p(x_p, y_p)$ şi $B_p(z_p, t_p)$, pentru $p = 1, 2, \ldots, 7$. Atunci

$$\sum_{p=1}^{7} \overrightarrow{A_pB_p} = \sum_{p=1}^{7}(z_p - x_p)\vec{i} + \sum_{p=1}^{7}(t_p - y_p)\vec{j}.$$

Pentru ca suma să fie $\vec{0}$ este necesar ca numerele $\sum_{p=1}^{7}(x_p - z_p) = \sum_{p=1}^{7}(x_p + z_p) - 2\sum_{p=1}^{7} z_p$ şi $\sum_{p=1}^{7}(y_p - t_p) = \sum_{p=1}^{7}(y_p + t_p) - 2\sum_{p=1}^{7} y_p$ să fie pare. Aceasta se întâmplă doar dacă prin eliminarea lui A rămâne un număr par de puncte cu abscisa impară şi un număr par de puncte cu ordonata impară; fals.

Punctaj recomandat: câte două puncte pentru determinarea fiecăreia din cele 2 tipuri de configuraţii; finalizare 3 puncte.